CORRECTION DU BAC ES DE PONDICHÉRY AVRIL 2013

Correction de l'exercice 1

1. F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ si pour tout x réel $F'(x) = f(x)$.
   Il suffit donc de calculer la dérivée de la fonction F, soit $F(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$ donc $f'(x) = u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}$
   donc $\boxed{f'(x) = -2x \times \mathrm{e}^{-x^2}}$ donc la bonne réponse est la réponse B.

2. $h(x) = 0 \iff (7x-23)\mathrm{e}^x = 0$, or $\mathrm{e}^x > 0$ donc $h(x) = 0 \iff 7x - 23 = 0 \iff 7x = 23 \iff x = \dfrac{23}{7}$
   donc l'équation $\boxed{\text{a une solution sur } [0\,;\,+\infty[}$ donc la bonne réponse est la réponse B.

3. On sait qu'une primitive de la fonction définie par $f_k(x) = k\mathrm{e}^{kx}$ est la fonction définie par $F_k(x) = \mathrm{e}^{kx}$.
   $I = \left[\mathrm{e}^{3x}\right]_0^1 = \mathrm{e}^{3\times 1} - \mathrm{e}^0$ donc $\boxed{I = \mathrm{e}^3 - 1}$.
   La bonne réponse est la réponse A.

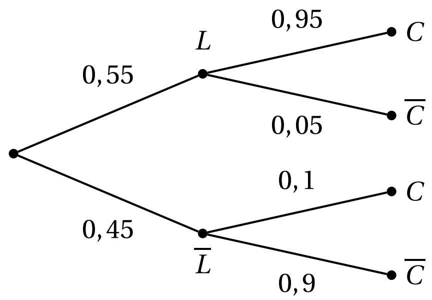
4. On peut pour cette question utiliser la calculatrice et tracer la courbe de la fonction g.
   On peut aussi calculer la dérivée seconde de la fonction g soit g''.
   $g'(x) = 3x^2 - 9$ et $g''(x) = 6x$ donc on peut dresser le tableau de variation de la fonction g'

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g''	$-$	0	$+$
g'	$\searrow$		$\nearrow$

   On en déduit que :
   la fonction g' est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ donc la fonction g est convexe sur $[0\,;\,+\infty[$;
   la fonction g' est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ donc la fonction g est concave sur $]-\infty\,;\,0]$.
   La bonne réponse est la réponse B.

Correction de l'exercice 2

1. L'arbre est le suivant :



2. $P(L \cap C) = P(L) \times P_L(C) = 0,55 \times 0,95$ donc $\boxed{P(L \cap C) = 0,5225}$.

3. $P(C) = P(L \cap C) + P\left(\overline{L} \cap C\right) = 0,5225 + P\left(\overline{L}\right) \times P_{\overline{L}}(C) = 0,5225 + 0,45 \times 0,1$
   donc $\boxed{P(C) = 0,5675}$.

4. $P_C(L) = \dfrac{P(C \cap L)}{P(C)} = \dfrac{0,5225}{0,5675}$ donc $\boxed{P_C(L) \approx 0,9207}$.

5. (a) On sait que $P(C) = 0,5675$ et on choisit 4 élèves au hasard donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,5675$.

   (b) Pour k entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant 4$, on sait que $n = 4$, $p = 0,5675$ et $1 - p = 0,4325$ donc :
   $p(X = k) = \dbinom{4}{k} \times 0,5675^k \times 0,4325^{4-k}$.
   $\boxed{p(X = 0) \approx 0,0350}$.

   (c) $\boxed{p(X = 2) \approx 0,3615}$.

Correction de l'exercice 3

1. On note $C_0 = 3\,000$ donc $C_1 = \left(1+\dfrac{2,5}{100}\right)\times C_0 = 1,025\times 3\,000$ donc $\boxed{C_1 = 3\,075}$.
   De même $C_2 = \left(1+\dfrac{2,5}{100}\right)\times C_1 = 1,025\times 3\,075$ donc $\boxed{C_2 = 3\,151,88}$.
2. $C_{n+1} = \left(1+\dfrac{2,5}{100}\right)\times C_n$ donc $\boxed{C_{n+1} = 1,025\times C_n}$.
   (C_n) est donc une suite géométrique de raison $1,025$ et de premier terme $C_0 = 3\,000$.
   Pour tout entier naturel n donc $C_n = 1,025^n \times C_0$ soit $\boxed{3\,000\times 1,025^n}$.
3. (a)

Valeur de n	0	1	2	3	4
Valeur de U	3 000	3 075	3 152	3 231	3 311
Condition $U \leqslant S$	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

   (b) Le nombre affiché est donc $2000+n = 2004$ donc l'affichage obtenu est $\boxed{2004}$.
   (c) Le nombre obtenu est l'année où le capital obtenu dépassera la somme S.
4. Au 1er janvier 2013, le capital est $C_{13} = 1,025^{13}\times 3\,000$ donc $C_{13} \approx 4\,135,53$ qui est donc plus petit que $5\,000$.
   On note que $C_{93} \approx 29\,815,41$ et $C_{94} \approx 30\,560,79$ donc le 1er janvier 2094 son capital de $3\,000$ a été multiplié par 10.

Correction de l'exercice 4

PARTIE A

1. Notons que la dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est la fonction $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$.
   $f'(x) = 0 - \left(1\times \mathrm{e}^{-x} + (x+1)\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\right) = -\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}$ donc $\boxed{f'(x) = x\mathrm{e}^{-x}}$.
2. $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de x. On peut dresser le tableau de variation de la fonction f.

x	0		6
f'		$+$	
f	0	$\nearrow$	$\approx 0,98$

   La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0\,;\,6]$ avec

x	0		α		6
f	0	$\nearrow$	$0,5$	$\nearrow$	$\approx 0,98$

   donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,6]$. De $f(1,678) \approx 0,4999$ et $f(1,679) \approx 0,5002$ on en déduit qu'à 10^{-2} près
   $\boxed{\alpha \approx 1,68}$.
3. $I = [F(x)]_0^6 = F(6) - F(0) = 6 + 8\mathrm{e}^{-6} - 2$ donc $\boxed{I = 4 + 8\mathrm{e}^{-6} \approx 4,020}$.

PARTIE B

1. On cherche donc x tel que $f(x) = 0,5$, en utilisant la question **A. 2.** on sait que la solution est $\alpha \approx 1,68$ donc au bout de $1,68$ mois, soit $1,68\times 30 \approx 50$ jours, la production atteindra 500 unités.
2. La valeur moyenne de la production, exprimée en milliers, est donnée par $\dfrac{1}{6-0}\times \displaystyle\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{I}{6} \approx 0,670$ soit 670 unités.

PARTIE C

1. $p(X \leqslant 160) = 0,5 - p(160 \leqslant X \leqslant 200)$ donc $\boxed{p(X \leqslant 160) \approx 0,16}$.
2. $p(X \geqslant 320) = 0,5 - p(200 \leqslant X \leqslant 320)$ donc $\boxed{p(X \geqslant 320) \approx 0,0013}$.
   Non la probabilité n'est pas supérieur à $0,01$.